DIDATTICA DELLE SCIENZE

Numero 61 del gennaio 1976

Sommario

Fascicolo di 36 pagine più inserti redazionali.

Inserti

Due gli inserti di questo numero.
La seconda parte dell'inserto dedicato all'evoluzione dei metazoi, ci fa assistere al lungo passaggio, dal porsi della esigenza di una cavità corporea fino all'affermarsi degli Artropodi. Se poniamo mente al fatto che questi rappresentano i 7/8 di tutte le specie animali possiamo dire di essere di fronte ad un esempio di evoluzione particolarmente ben riuscito.
Presentiamo anche il primo dei tre cartelloni di questa annata, dedicati alle malattie delle piante. Il relativo commento, che tocca l'interessante, anche se poco conosciuta, disciplina della fitopatologia, è a pag. 16.

In copertina

Acetosella *(Oxalis acetosella)*, spontanea nei boschi di montagna da 1500 a 2300 m.

Carlo Felice Manara

OSSERVAZIONI SULLA GEOMETRIA DESCRITTIVA

1. Questo articolo fa seguito ad un altro che riguardava l'impiego delle figure nell'insegnamento della geometria, comparso su questo stesso periodico (n. 60).
È noto che la geometria, a causa della crisi avvenuta nella seconda metà del secolo XIX, ha assunto un duplice aspetto: quello di un puro sistema ipotetico-deduttivo e quello di una teoria fisica.
Nell'aspetto di un sistema ipotetico-deduttivo, cioè di una teoria logica astratta in cui le parole non hanno alcun significato che risponde alla realtà, la geometria risulta essere un gioco logico, che trae la validità dei propri enunciati semplicemente dalla coerenza con le proposizioni che sono state scelte come proposizioni iniziali. Nel secondo aspetto la geometria si presenta come il « primo capitolo della fisica », cioè come una teoria che riguarda gli oggetti della nostra esperienza fisica, i corpi solidi, le traiettorie dell'energia ecc., considerati sotto il punto di vista della forma e della mutua posizione. Ovviamente quando ci si ponga da questo secondo punto di vista, la geometria non ha più i caratteri di scienza assolutamente certa che le erano stati attribuiti dalla tradizione: basti pensare alla espressione classica che B. Spinoza ha adottato nella sua opera; dicendo « more geometrico » o « ordine geometrico » a quell'epoca si pensava di dare il paradigma della chiarezza, della certezza, del rigore logico di deduzione. In questo secondo modo di vedere, la geometria acquista invece i caratteri di una qualunque teoria fisica: fatta per descrivere la realtà, per inquadrare in modo logicamente accettabile le nostre esperienze, per dedurre ulteriori informazioni da quelle che già si posseggono.
Tuttavia questo inquadramento razionale della realtà della nostra esperienza deve essere visto nella giusta luce: da una parte non si può pretendere che esso ci dia tutta la realtà, con certezza assoluta; si ottiene invece una teoria che ha le stesse proprietà di una teoria fisica, e quindi è valida soltanto entro determinati limiti di approssimazione, a meno di certi errori, il cui ordine di grandezza è determinato di volta in volta dal problema che si tratta di risolvere. D'altra parte occorre non cadere nello scetticismo che porterebbe a ripudiare la geometria in questo secondo senso solo perché ha perduto i caratteri di scienza chiarissima e certissima che le erano attribuiti dalla mentalità classica.
Nell'ambito di questo secondo aspetto della geometria, cioè in corrispondenza alla accezione della geometria come « primo capitolo della fisica », gli strumenti e le idee di questa scienza vengono utilizzati continuamente nelle altre scienze, nella tecnica, nella vita civile; tale uso è analogo a quello che si fa degli altri strumenti della matematica per la formulazione delle leggi e per la deduzione di conseguenze. Questa analogia non è forse colta sempre nella sua interezza perché abitualmente si è piuttosto tentati di affidare alla geometria un ruolo che è quello della pura illustrazione. Quindi vale la pena di fare qualche riflessione a proposito dell'impiego della geometria per la conoscenza della realtà. L'università italiana qualche decennio fa ammetteva tradizionalmente nei suoi statuti i corsi di « geometria descrittiva ». Questi corsi oggi non esistono più, per ragioni che derivano dal progresso della matematica e dalla diversa concezione del ruolo della geometria nella tecnica; per esempio, la professione dell'ingegnere ha cambiato nettamente la propria fisionomia durante questi ultimi tempi, ha reso meno utile la geometria descrittiva e più urgente lo studio di altre teorie matematiche.
Ripetiamo tuttavia che vale la pena di arrestarsi un poco a meditare su questa materia, che conserva ancora oggi una sua validità e, soprattutto, potrebbe aiutare ad una retta interpretazione della geometria in quanto scienza, che fa parte della matematica dando un apporto insostituibile.

2. Come è noto, nella tradizione della geometria descrittiva vi era lo studio di un insieme di convenzioni per rappresentare con figure gli enti dello spazio ordinario tridimensionale mediante figure appartenenti al piano.
Queste convenzioni sostanzialmente consistevano in proiezioni che venivano effettuate da punti (centri) scelti con determinate leggi.
In questo ordine di idee si suole dire che i primi metodi di geometria descrittiva sono da farsi risalire agli studi

di prospettiva (lineare) che furono svolti dai pittori del Rinascimento.

Si trovano esplicitamente in questi studi le ricerche per poter dare a chi guarda il dipinto la sensazione della profondità. Ovviamente questi problemi, che riguardavano soltanto l'arte figurativa, possono anche essere trasferiti nella scienza e nella tecnica. In questo campo si pongono per es. problemi di rappresentazione, che riguardano l'edilizia e la tecnologia del legno e dei metalli; oppure problemi che riguardano la ricostruzione delle figure terrestri a partire da fotografie (fotogrammetria) oppure si hanno anche problemi nati in epoca più recente riguardanti la localizzazione nello spazio di punti che interessano: per esempio si può trattare del problema che riguarda la difesa antiaerea di un territorio, e la localizzazione di un aereo mediante più stazioni radar. Come si vede, la gamma dei problemi tecnici che riguardano la geometria descrittiva è molto vasta e interessa non soltanto la rappresentazione di figure tridimensionali in modo che l'osservatore abbia l'impressione di una terza dimensione, ma anche problemi della tecnica più avanzata.

Prima di analizzare i metodi della geometria descrittiva nei loro fondamenti, ricordiamo che il problema della rappresentazione convenzionale degli enti della geometria può essere risolto anche con altri mezzi: uno dei più classici è il metodo delle coordinate (cartesiane oppure no) che in sostanza permette di rappresentare gli enti dello spazio e di risolvere anche i problemi che vi si riferiscono.

In questo ordine di idee si potrebbe ricordare anzitutto un metodo classico di rappresentazione della geometria descrittiva, metodo che costituisce una specie di compromesso tra la rappresentazione degli enti geometrici mediante disegni e le convenzioni della geometria analitica. Vogliamo alludere al metodo che viene chiamato tradizionalmente « delle proiezioni quotate ». Fissato un piano, che viene chiamato talvolta « quadro », per es. il piano del foglio, ad ogni punto P dello spazio si fa corrispondere il punto P' che si ottiene proiettando P sul piano ortogonalmente: accanto a P' viene scritta la « quota » di P, cioè la distanza del punto stesso dal « quadro ».

Questo metodo si presta per es. per rappresentare le superficie mediante « linee di livello », cioè rappresentando sul quadro le proiezioni delle curve che stanno su una superficie e che hanno la medesima quota (fig. 1).

Ciascuno riconoscerà in questa tecnica il metodo che si utilizza abitualmente per rappresentare sul piano delle regioni abbastanza ristrette della superficie terrestre.

La clausola che abbiamo enunciato dicendo che le regioni rappresentate debono essere « abbastanza ristrette » si ricollega alla discussione che abbiamo già fatto nell'articolo citato a proposito della fedeltà della rappresentazione di una regione della Terra mediante figure piane. È noto infatti che la superficie terrestre non è applicabile sul piano; in altri termini si può dire che con una porzione di piano, realizzata con un foglio sottilissimo perfettamente flessibile ed inestendibile, non si può « rivestire » una porzione anche piccola di superficie terrestre senza lacerazioni o senza duplicazioni. Con altre parole ancora si potrebbe dire che la rappresentazione di una parte di superficie terrestre su di un piano deve in certa misura essere infedele; tuttavia se la regione rappresentata è abbastanza ristretta gli errori che si commettono possono essere considerati trascurabili, in relazione alle informazioni che si vogliono trarre dalla rappresentazione.

Quando si presenta questo caso si può sostituire la superficie terrestre nell'intorno abbastanza ristretto di un punto con il piano tangente alla superficie nel punto stesso. Allora la rappresentazione si ottiene rappresentando ogni punto P della superficie terrestre con il punto P' che è la sua proiezione sul piano tangente.

3. Abbiamo esposto fin qui delle convenzioni di rappresentazione degli elementi dello spazio che utilizzano in parte anche delle idee della geometria analitica. Ci occuperemo ora brevemente delle convenzioni puramente grafiche, cioè delle convenzioni che utilizzano soltanto delle figure per rappresentare gli enti dello spazio.

A questo proposito si può fare subito una osservazione

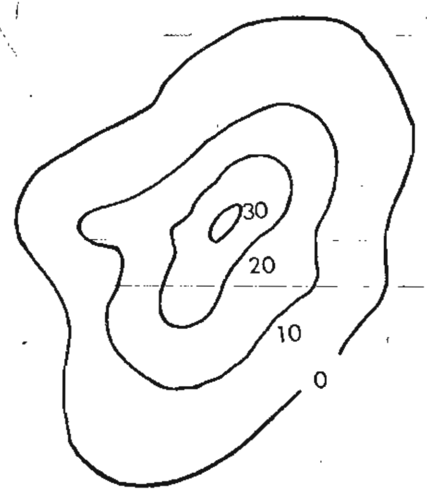


Fig. 1

che è abbastanza ovvia ma che non viene forse sempre tenuta nel debito conto, come si vedrà.

Precisamente, si può osservare che non è possibile rappresentare lo spazio, che ha tre dimensioni, sul piano, che ne ha soltanto due, salvando un minimo di verosimiglianza nella rappresentazione, così che l'utente della stessa possa « leggere » in modo approssimativo le pro-

prietà degli enti rappresentati sulla loro immagine. In teoria infatti sarebbe possibile rappresentare degli enti dello spazio tridimensionale mediante immagini appartenenti ad uno spazio avente un numero minore di dimensioni; per es. sarebbe possibile, come ha dimostrato G. Cantor, dare una corrispondenza biunivoca tra i punti di un quadrato o di un cubo ed i punti di un segmento.
Questa possibilità non è soltanto teorica; possiamo invero ricordare qui di passaggio che abitualmente nella tecnica televisiva una figura a due dimensioni viene riprodotta con una « immagine » ad una dimensione, cioè con una successione rapidissima di segnali disposti successivamente nel tempo. Come è noto, ciò avviene utilizzando un procedimento che viene chiamato abitualmente « scanning » e che potrebbe essere indicato in italiano con il nome di « esplorazione » successiva delle linee in cui viene decomposta la figura. La ricostruzione di questa, ossia la decifrazione o « decodificazione » del segnale convenzionale e la trasmissione della informazione che si vuole dare, viene fatta praticamente utilizzando le imperfezioni dei sensi umani: il limite inferiore del potere risolutivo dell'occhio e la persistenza delle immagini sulla retina.
Non vogliamo qui approfondire l'argomento e ci limitiamo ad osservare che tanto nel caso teorico (che risale alle ricerche di Cantor di cui si è detto) quanto nel caso pratico della televisione le immagini unidimensionali delle figure a più dimensioni presentano un inconveniente fondamentale, dato dal fatto che punti che nella realtà risultano « vicini » vengono ad essere rappresentati in modo che le loro immagini non sono più « vicine ». Qui abbiamo utilizzato l'espressione « vicini » nel suo significato abituale e intuitivo, che appare sufficiente per i nostri scopi; tuttavia osserviamo che la cosa potrebbe essere precisata in modo rigoroso senza far ricorso alla intuizione.
Come abbiamo detto poco fa, nel caso della televisione l'inconveniente viene superato sfruttando le imperfezioni dei sensi umani, ed i limiti del nostro sistema nervoso. Ma questo non è possibile nel caso teorico.

4. Tutto ciò che è stato detto fin qui conduce ad intuire la validità dell'osservazione che abbiamo fatto poco fa, che cioè la rappresentazione di una figura geometrica nello spazio tridimensionale non si può dare nello spazio bidimensionale, a meno che non si adottino opportune convenzioni.
Noi supponiamo qui che siano note al lettore almeno le principali convenzioni che si adottano tradizionalmente per la rappresentazione delle figure dello spazio tridimensionale nel piano. Quelle che adesso vogliamo passare in rassegna sono sostanzialmente le due classiche, le quali vengono abitualmente indicate con le espressioni ben note: metodo delle « proiezioni ortogonali » e metodo delle « proiezioni centrali ».

Il metodo delle proiezioni ortogonali utilizza sostanzialmente due piani tra loro ortogonali e proietta ogni punto dello spazio ortogonalmente su ciascuno di essi; quando la cosa sia necessaria, viene utilizzato anche un terzo piano, ortogonale a ciascuno dei precedenti, che viene chiamato « piano di profilo ».
Questo metodo è sostanzialmente utilizzato anche dalla tecnica e nel disegno di officina, quando certi pezzi vengono descritti in modo completo mediante le proiezioni che sono dette spesso « pianta » ed « alzata ».
In sostanza quindi il problema di « leggere » le proprietà della figura rappresentata sulle sue due (o tre) proiezioni viene ricondotto alla applicazione delle proprietà della operazione di proiezione. Nel caso presente le proiezioni sono eseguite da punti all'infinito, ognuno dei quali corrisponde alla direzione ortogonale a quella del piano su cui si proietta.
Nell'altro metodo classico, quello che viene chiamato « metodo delle proiezioni centrali », si utilizza un centro di proiezione unico, assegnando insieme con la proiezione di un punto o di una retta anche ulteriori elementi che permettono di ricostruire la loro posizione nello spazio. Come si sa, si può avere una ulteriore possibilità di scelta scegliendo la posizione del centro al finito oppure all'infinito. Sull'immagine (che viene chiamata « quadro ») nel primo caso si hanno informazioni che permettono di determinare la posizione del centro di proiezione rispetto alla immagine stessa.
Nel caso in cui il centro di proiezione sia stato scelto all'infinito si è condotti ai vari metodi che vengono chiamati di « prospettiva cavaliera » oppure anche di « assonometria »; anche qui si possono dare delle convenzioni che permettono di ricavare dall'immagine le proprietà della figura che si rappresenta.
Per riassumere brevemente le idee che stanno alla base della geometria descrittiva, vorremmo mettere in evidenza due argomenti che ci appaiono fondamentali: anzitutto l'insieme delle convenzioni che si utilizzano per la rappresentazione e che permettono di decifrare ovvero « decodificare » la informazione e di ricostruire la figura dello spazio in base alla sua immagine; in secondo luogo il tipo di trasformazione alla quale si sottopone la figura da rappresentare per ottenerne una immagine.
Delle convenzioni abbiamo detto poco fa; sarà interessante osservare che spesso, quando l'immagine diventa solo « illustrazione », queste convenzioni sono supposte, oppure sono tratte dal contesto del discorso o dalle abitudini dell'osservatore. Ciò può essere comodo talvolta, soprattutto per quanto riguarda lo sfruttamento delle abitudini; ma può dare luogo a equivoci e a situazioni paradossali, che derivano da informazione incompleta oppure da una presunzione ingiustificata sulle abitudini dell'osservatore; il che porta questo a supporre soddisfatte certe condizioni che invece non lo sono nel caso particolare. Spesso, per esempio, sono « presunte » le convenzioni

relative alle informazioni che ci vengono comunicate quotidianamente dagli organi di stampa, che ci inondano ormai in modo inarrestabile di materiale grafico.

Le fotografie che osserviamo tutti i giorni sui giornali e sui settimanali sono da tutti interpretate come se fossero delle proiezioni centrali. In particolare la posizione del centro di proiezione non sempre risulta determinata, ma l'osservatore fa automaticamente la ricostruzione nello spazio, della figura rappresentata, secondo certe informazioni presunte che aiutano questo automatismo fisiologico. Per chiarire le idee, si osservi la figura 2, che rappresenta una fotografia di tre piscine. Pensiamo che

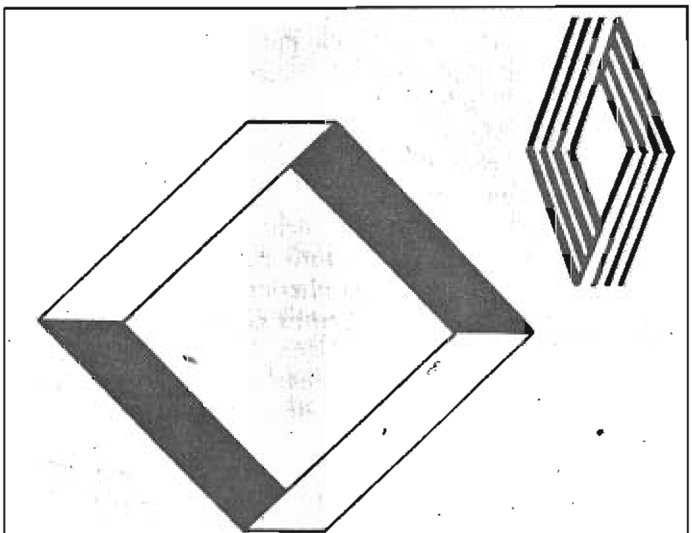
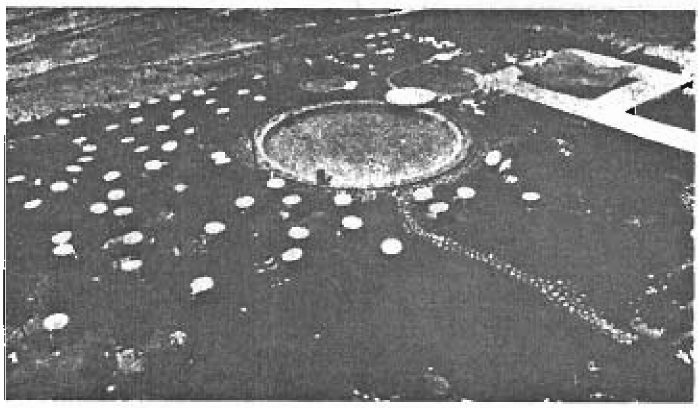


Fig. 2

nella maggioranza degli osservatori sia difficile contrastare la convinzione che le piscine rappresentate siano circolari. Sta di fatto che nella fotografia le immagini appaiono ellittiche; ma si possono fare due osservazioni: anzitutto le immagini delle piscine (le piccole e la grande) sono omotetiche, e quindi la sola conclusione che si può trarre a rigore è che le piscine hanno tutte la stessa forma; in secondo luogo le immagini delle piscine sono

Fig. 3



omotetiche a quelle degli ombrelloni. Si può quindi dire che, poiché abitualmente gli ombrelloni sono circolari, la forma delle piscine deve essere simile a quella degli ombrelloni.

Il fatto che si ha una integrazione automatica delle immagini nello spazio per una certa abitudine di osservare le figure nello spazio e le loro immagini è confermato anche dalla esistenza di certe « figure paradossali », di cui presentiamo qui alcuni esemplari e che hanno a prima vista un aspetto « inquietante »; questo fatto è dovuto appunto alla circostanza che l'osservatore ha l'abitudine di ricostruire le figure nello spazio. Per es. la fig. 3 può essere spesso interpretata come rappresentante un « nastro » nello spazio; l'osservatore è anche portato ad immaginare una sorgente di luce in alto a sinistra, dietro le spalle dell'osservatore. Questa sorgente di luce illuminerebbe le zone bianche e lascerebbe in ombra le zone scure; ma la figura non è logicamente coerente con questa interpretazione.

Analoghe osservazioni possono essere fatte a proposito della fig. 4. Spesso l'osservatore può essere portato a interpretare la figura come l'immagine dello « scheletro » di un cubo; ma questa interpretazione non riesce coerente con l'intera figura. Infine l'immagine della fig. 5, in cui l'osservatore è portato a « vedere » una scala, risulta ancora più inquietante perché la scala risulta essere « sempre in discesa » (oppure sempre in salita, a seconda del senso in cui la si immagina percorsa) e ciò urta contro le nostre esperienze del mondo fisico.

Abbastanza analogo è il senso di disagio che si prova nell'osservare la figura 6, in cui si ritrova una « incoerenza » che ancora una volta è originata dalla integrazione nello spazio delle figure, cioè da un supplemento di informazione che l'osservatore trae non dalla sola figura ma da tutta la sua esperienza e dalla memoria.

5. Ciò che abbiamo detto fin qui può essere ulteriormente precisato e ci porta a discutere il secondo argomento, di cui abbiamo parlato prima, e cioè il tipo di trasformazione alla quale la figura spaziale viene sottoposta per darne una immagine.

Soltanto la conoscenza di questa trasformazione può permettere di « decodificare » l'informazione che è contenuta nell'immagine e quindi di trarre da questa tutte le informazioni che ci interessano.

Già abbiamo parlato della prospettiva e dei metodi delle proiezioni ortogonali e centrali. In questi casi ovviamente la trasformazione alla quale viene sottoposta la figura dello spazio è semplicemente una proiezione. Pertanto risultano applicabili le proposizioni della geometria proiettiva classica ed ha senso cercare gli « invarianti » della figura attraverso la sua immagine. Occorre tuttavia sempre tener presente che questi « invarianti » sono strettamente collegati con il gruppo di trasforma-

Fig. 4

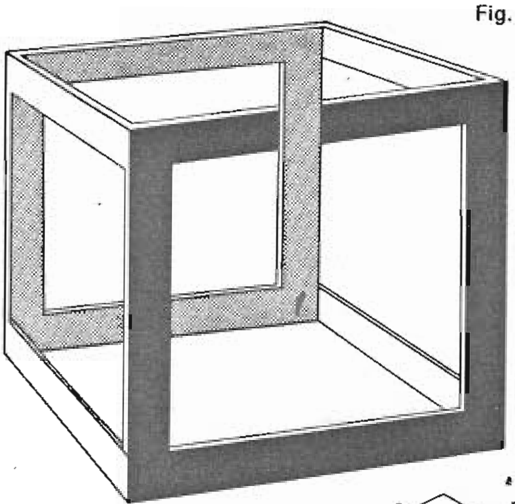
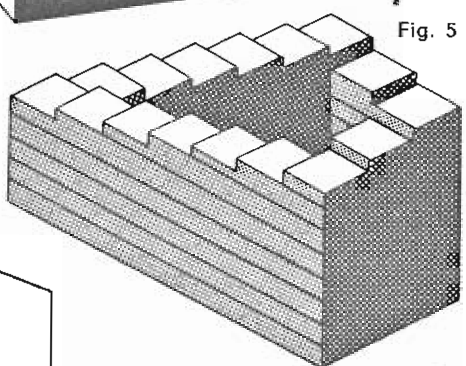


Fig. 5



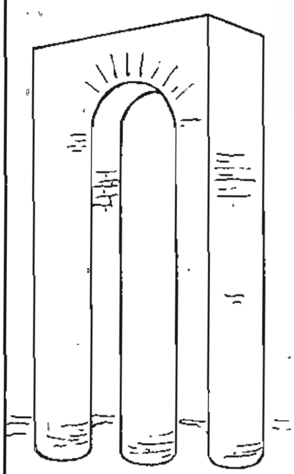
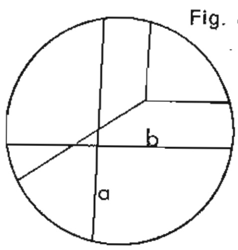


Fig. 6

Fig. 8



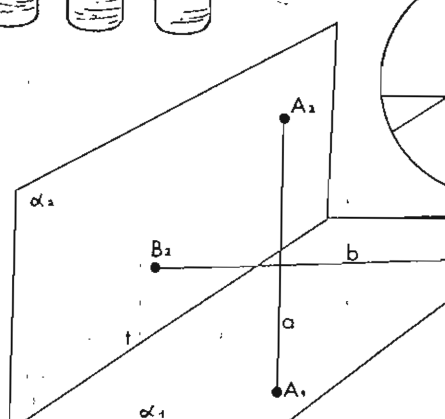


Fig. 7

zioni che si utilizza e la loro determinazione deve tener conto anche dell'osservazione che abbiamo fatto sopra a proposito della dimensione dello spazio e delle convenzioni che occorre introdurre per rappresentare lo spazio sul piano.

È chiaro per es. che se in fotografia due rette appaiono intersecantisi, non è detto che lo siano nella realtà. Infatti è noto che fra le proprietà fondamentali del gruppo delle trasformazioni proiettive vi sono le proprietà di appartenenza; in altre parole: se un punto appartiene ad una retta, anche la proiezione del punto appartiene alla proiezione della retta. Ma il viceversa non è vero, come si può intuire osservando le due figure 7 ed 8.

Nella figura 7 sono stati rappresentati in prospettiva cavaliera, due piani, chiamati rispettivamente α_1 ed α_2, il primo orizzontale ed il secondo verticale rispetto ad un osservatore. Si pensi per es. al pavimento (α_1) e ad una parete (α_2) di una stanza. Sono poi rappresentate due rette, indicate con a e b; di tali rette sono indicate le « tracce », cioè i punti in cui esse intersecano i due piani. Si hanno quindi i punti A_1 e A_2 in cui la retta a interseca i due piani α_1 ed α_2; e analogamente i punti B_1 e B_2 in cui la retta b interseca i due piani α_1 ed α_2.

In base a queste informazioni, e con costruzioni che si eseguiscono facilmente, si arriva a concludere che le due rette rappresentate a e b sono sghembe tra loro nello spazio.

Le costruzioni che abbiamo ricordato possono essere per es. le seguenti: si congiungano le due tracce A_1 e B_1 delle rette sul piano α_1; si faccia analogamente per le due tracce A_2 e B_2 sul piano α_2. Le due congiungenti non si incontrano sulla retta t che rappresenta la intersezione dei due piani α_1 ed α_2 come invece dovrebbe avvenire necessariamente se le due rette a e b fossero complanari. È chiaro che si può giungere alla conclusione riguardante le rette soltanto in base alle informazioni che abbiamo date e che si riferiscono alla tecnica utilizzata per ottenere le immagini delle due rette ed agli elementi accessori che entrano nella immagine stessa. Per convincerci pienamente della necessità di queste conclusioni, possiamo immaginare di isolare un particolare della figura 7, come è stato fatto nella fig. 8; per es. se supponiamo di sapere che le rette a e b sono le fotografie di due fili nello spazio è chiaro che nella figura 8 mancano informazioni sufficienti per poter concludere che i due fili sono complanari oppure sono sghembi tra loro.

Va detto tuttavia che l'operazione di proiezione non è la sola che si può impiegare per dare la rappresentazione sul piano di una figura.

La fotografia con i suoi « trucchi » offre numerosissimi esempi di figure che il pubblico chiamerebbe « deformate ». La fig. 9 rappresenta la facciata di un palazzo (che potremmo supporre piana) che è stata deformata con una trasformazione che è un diffeomorfismo. Nel passaggio

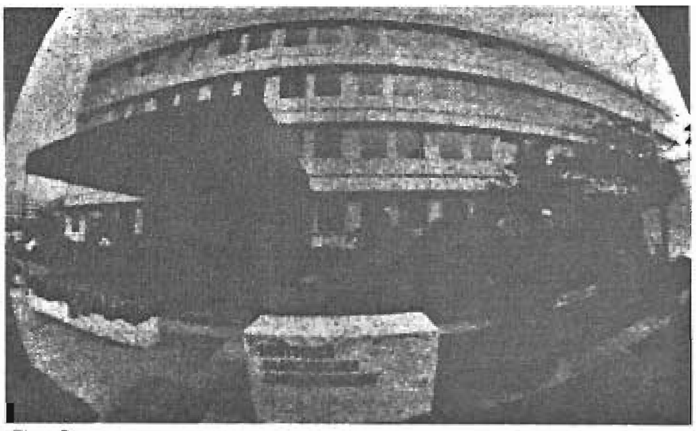


Fig. 9


Fig. 10


Fig. 11

dalla fig. 10 alla fig. 11 la deformazione appare ancora più profonda, perché si potrebbe classificare tra gli omeomorfismi, cioè trasformazioni biunivoche e continue. È da osservare tuttavia che dato il tipo di trasformazione che è stata impiegata, esistono alcuni « invarianti » della figura di partenza che possono essere letti sulla sua immagine deformata: per es. il fatto che due punti siano « vicini » o « contigui ».

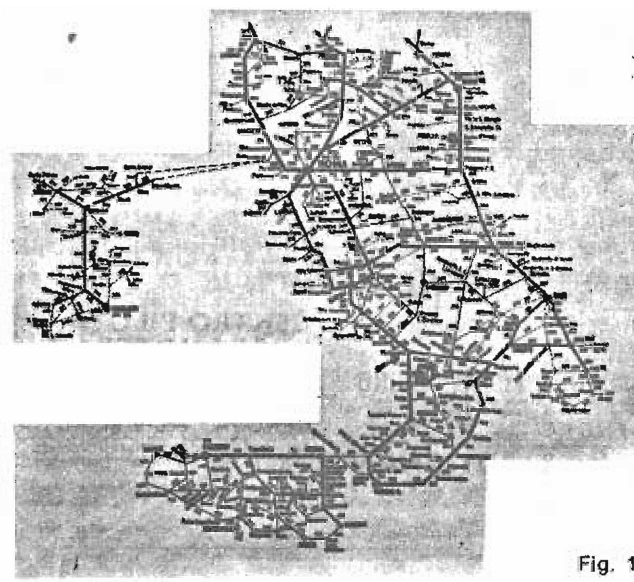


Fig. 12

Va da sé che il viso rappresentato dalla fig. 11 non è più riconoscibile, ma ciò è dovuto al fatto che l'operazione che ci porta al riconoscimento di un volto è molto complicata e si basa sostanzialmente sul gruppo delle similitudini. È chiaro infatti che il viso sarebbe riconoscibile se la foto fosse « ingrandita », ma già sarebbe difficilmente riconoscibile se la foto fosse semplicemente « allungata » in modo da conservarle le dimensioni trasversali ma non le altezze.

È tuttavia possibile pensare di « decodificare » l'informazione che viene data dall'immagine deformata, beninteso quando si conosca la legge secondo la quale questa è ottenuta dall'immagine originale.

È infine da osservare che molto spesso le immagini ottenute per omeomorfismo (cioè per deformazione continua) sono sufficienti per fornire le informazioni che interessano in un dato problema; pertanto in questi casi la decodificazione non è neppure necessaria, perché anche l'immagine deformata basta allo scopo che si vuole conseguire. Di queste immagini sono esempio quelle « cartine » schematiche che rappresentano una regione geografica, mettendone in evidenza le comunicazioni ferroviarie (fig. 12).